

Le misure e algebra vettoriale

(Dall'Allegato A: Programmi relativi ai quesiti delle prove di ammissione ai corsi di laurea magistrale in Medicina e Chirurgia, in Odontoiatria e Protesi Dentaria, in Medicina Veterinaria e ai corsi di laurea delle professioni sanitarie.)

- Grandezze fisiche e loro misura:
 - Grandezze fisiche fondamentali e derivate.
 - Sistemi di unità di misura: Internazionale e Tecnico.
 - Multipli e sottomultipli.
 - Notazione scientifica.
 - Principali conversioni tra unità di misura di sistemi diversi.
 - Grandezze scalari e grandezze vettoriali.
 - Vettori e operazioni sui vettori.
-

Le equazioni nella fisica

- Un'equazione in fisica definisce i rapporti esistenti tra diverse grandezze misurabili



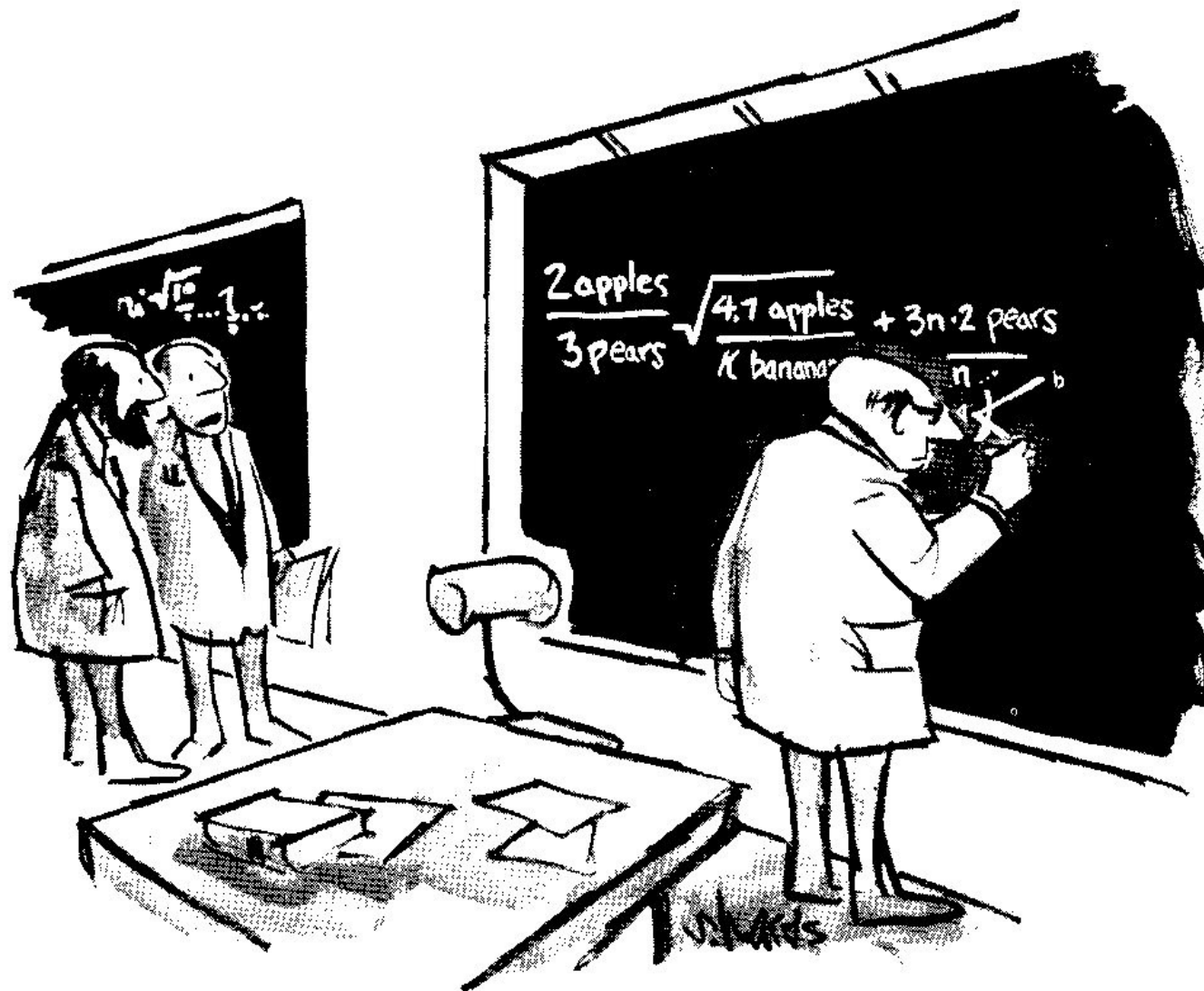
"I misuratori" – Scuola fiamminga del tardo XVI sec.



“La pesatura dell'anima” (psicostasia) - Dal “Libro dei morti”

Le equazioni nella fisica

- Un'equazione in fisica definisce i rapporti esistenti tra diverse grandezze misurabili
 - Le grandezze fisiche possono essere variabili oppure costanti
 - Per guadagnare in generalità si utilizzano dei simboli per rappresentare le diverse grandezze
-



"IF ONLY HE COULD THINK IN
ABSTRACT TERMS."

Reproduced by special permission of Playboy Mag.
Copyright © January 1970 by Playboy

Grandezze fisiche

- ❑ Per definire quantitativamente la misura di una grandezza è necessario compararla con una quantità standard della stessa grandezza: l'**unità di misura**.
- ❑ Per l'unità di misura di ogni grandezza fondamentale deve essere definito un campione. Tali campioni devono essere:
- ❑ **accessibili** (devono poter essere esattamente riprodotti);
- ❑ **invarabili** (non devono cambiare nel tempo e/o nello spazio).

Grandezze fisiche

- ❑ Non è possibile per ragioni pratiche definire per ogni grandezza fisica un campione di riferimento.
 - ❑ Si sceglie allora di compiere tale operazione per un numero limitato di grandezze che vengono chiamate **fondamentali**.
 - ❑ Tutte le altre grandezze si derivano a partire da quelle fondamentali e vengono perciò chiamate **derivate**.
-

Grandezze fisiche

- Le grandezze derivate si costruiscono a partire dalle grandezze fondamentali attraverso relazioni del tipo:

$$D = \prod_i [F_i]^{\alpha_i} \quad i \in \mathbb{N}_0 \quad \alpha_i \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

- Il prodotto viene chiamato **dimensione fisica** della grandezza D e si indica $[D]$.
(la dimensione fisica di una grandezza fondamentale coincide con la grandezza).
- L'eq. (1) si chiama **equazione dimensionale**.

Esempio: Grandezze fisiche

Grandezze fisiche fondamentali:

tempo [t] lunghezza [l] massa [m]

Derivate

$$D = \prod_i [F_i]^{\alpha_i}$$

velocità = spazio / tempo

$$[v] = [l] / [t] = [l] [t]^{-1}$$

forza = massa*accelerazione

$$[F] = [m] [a] = [m] [v] / [t] = [m] [l] [t]^{-2}$$

Grandezze fisiche

Il numero delle grandezze fondamentali:

- non deve essere molto alto (per non dover definire troppi campioni);
- non può essere molto basso (per non complicare eccessivamente le equazioni dimensionali).

Sistema di unità di misura

- ❑ Per ogni grandezza (fondamentale o derivata) si definisce una **unità di misura**.
- ❑ L'insieme delle unità di misura forma un **Sistema di Unità di misura**
- ❑ In una equazione della fisica **tutte le unità devono appartenere allo stesso Sistema**

Unità di misura

- Per ogni grandezza (fondamentale o derivata) si definisce una **unità di misura**.
- Per le unità di misura delle grandezze derivate vale una relazione simile a quella per le grandezze: se $U(F_i)$ è l'unità di misura della i -esima grandezza fondamentale:

$$U(D) = k \prod_i [U(F_i)]^{\alpha_i} \quad i \in \mathbb{N}_0 \quad \alpha_i \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Sistemi di Unità di misura

- ❑ L'insieme delle unità di misura (fondamentali e derivate) forma un **Sistema di Unità di misura**
- ❑ In una equazione della fisica **tutte le unità devono appartenere allo stesso Sistema di Unità di misura**
- ❑ Se nella (2) $k = 1$ per qualunque $U(D)$ il sistema di Unità di Misura è detto **coerente**.

Sistema Internazionale (S.I.)

Unità fondamentali del **Sistema Internazionale** (S.I.):

<i>Grandezze</i>	<i>Nome</i>	<i>Simbolo</i>
tempo	secondo	s
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	kg
quantità di materia	mole	mole
temperatura termodinamica	kelvin	K
corrente elettrica	ampere	A
intensità luminosa	candela	cd

Sistema c.g.s.

Unità fondamentali

<i>Grandezze</i>	<i>Nome</i>	<i>Simbolo</i>	Rapporto con unità SI
tempo	secondo	s	
lunghezza	centimetro	cm	$= 10^{-2} \text{ m}$
massa	grammo	g	$= 10^{-3} \text{ kg}$

Unità derivate

accelerazione	galileo	$1 \text{ gal} = 1 \text{ cm/s}^2$	$= 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$
forza	dyne	$1 \text{ dyn} = 1 \text{ g cm/s}^2$	$= 10^{-5} \text{ N}$
energia	erg	$1 \text{ erg} = 1 \text{ g cm}^2/\text{s}^2$	$= 10^{-7} \text{ J}$
potenza	erg / secondo	$1 \text{ erg/s} = 1 \text{ g cm}^2/\text{s}^3$	$= 10^{-7} \text{ W}$
pressione	baria	$1 \text{ bar} = 1 \text{ dyn cm}^{-2}$	$= 10^{-1} \text{ Pa}$
viscosità	poise	$1 \text{ P} = 1 \text{ g}/(\text{cm s})$	$= 10^{-1} \text{ Pa s}$

Sistema tecnico-pratico

Unità fondamentali

<i>Grandezze</i>	<i>Nome</i>	<i>Simbolo</i>
lunghezza	metro	m
forza	chilogrammo forza	kg _f , kg _p , kp
tempo	secondo	s
temperatura	grado Celsius	°C

Unità derivate

massa	unità tecnica di massa	UTM
energia	chilogrammetro	kgm
calore	caloria, chilocaloria	cal, kcal
potenza	cavallo vapore, chilocaloria all'ora, Watt	CV, kcal h ⁻¹ , W
pressione	kg _f cm ⁻² , atmosfera, millimetro di mercurio	atm, mmHg

Multipli e sottomultipli

- Si usano delle abbreviazioni per semplificare la scrittura di numeri molto grandi o molto piccoli. I multipli e i sottomultipli che vengono utilizzati sono:

<i>Fattore di moltiplicazione</i>	<i>Prefisso</i>		<i>Fattore di moltiplicazione</i>	<i>Prefisso</i>	
	<i>Nome</i>	<i>Simbolo</i>		<i>Nome</i>	<i>Simbolo</i>
10^1	deka	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	Femto	f

Conversione di grandezze fisiche

- Passaggio da un SUM ad un altro; vi sono due situazioni differenti:
- **le grandezze fondamentali sono le stesse** ($SI \Leftrightarrow CGS$);
- **le grandezze fondamentali sono differenti** ($SI \Leftrightarrow Britannico$).

Fattore di ragguaglio

- E' un fattore che stabilisce il **rapporto** tra le unità di misura della stessa grandezza tra due sistemi di u.d.m. differenti.

- Esempio.

grandezza: lunghezza [l]

u.d.m. nel S.I.: metro

$$m = 10^2 \text{ cm}$$

u.d.m. nel c.g.s.: centimetro

$$cm = 10^{-2} \text{ m}$$

- Fattore di ragguaglio S.I. → c.g.s.

$$\frac{u.d.m.(S.I.)}{u.d.m.(c.g.s.)} = \frac{1m}{1cm} = \frac{10^2 cm}{1cm} = 10^2$$

Conversione di grandezze fisiche

- Il caso 1) si tratta nel seguente modo: si vuole passare da S ad S' :

$$U(D) = k \prod_i [U(F_i)]^{\alpha_i}, \quad U'(D) = k \prod_i [U'(F_i)]^{\alpha_i}$$

- Dati i fattori di ragguglio tra le grandezze F_i :

$$r_{S \rightarrow S'}(F_i)$$

$$\frac{U(F_1)}{U'(F_1)} = r_{S \rightarrow S'}(F_1), \quad \frac{U(F_2)}{U'(F_2)} = r_{S \rightarrow S'}(F_2) \dots \frac{U(F_n)}{U'(F_n)} = r_{S \rightarrow S'}(F_n)$$

Conversione di grandezze fisiche

□ il fattore di ragguglio per D , $r_{S \rightarrow S'}(D)$, è dato da:

$$r_{S \rightarrow S'}(D) = \frac{U(D)}{U'(D)} = \frac{k \prod_i [U(F_i)]^{\alpha_i}}{k \prod_i [U'(F_i)]^{\alpha_i}} = \prod_i \left[\frac{U(F_i)}{U'(F_i)} \right]^{\alpha_i} = \prod_i [r_{S \rightarrow S'}(F_i)]^{\alpha_i}$$

Conversione di grandezze fisiche

□ esempio: conversione dell'u.d.m. della forza

forza = massa · accelerazione

S.I.: Newton (N) c.g.s.: dyne (dyn)

$$1 N = (1 kg)(1 m)(1 s)^{-2} \quad 1 dyn = (1 g)(1 cm)(1 s)^{-2}$$

$$1 N = (1 kg)(1 m)(1 s)^{-2} = (10^3 g)(10^2 cm)(1 s)^{-2} = 10^5 g cm s^{-2} = 10^5 dyn$$

$$1 dyn = (1 g)(1 cm)(1 s)^{-2} = (10^{-3} kg)(10^{-2} m)(1 s)^{-2} = 10^{-5} kg m s^{-2} = 10^{-5} N$$

$$r_{SI \rightarrow cgs}(forza) = 10^5 \quad r_{cgs \rightarrow SI}(forza) = 10^{-5}$$

$$r_{SI \rightarrow cgs}(forza) = \frac{1}{r_{cgs \rightarrow SI}(forza)}$$

Conversione di grandezze fisiche

□ esempio: conversione dell'u.d.m. della pressione

$$\text{pressione} = \frac{\text{forza}}{\text{superficie}}$$

S.I.: Pascal (Pa)

c.g.s.: baria (Ba)

$$1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{(1 \text{ m})^2}$$

$$1 \text{ Ba} = \frac{1 \text{ dyn}}{1 \text{ cm}^2}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ Pa} &= \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2} = \frac{(1 \text{ kg})(1 \text{ m})(1 \text{ s})^{-2}}{(1 \text{ m})^2} = \frac{(10^3 \text{ g})(10^2 \text{ cm})(1 \text{ s})^{-2}}{(10^2 \text{ cm})^2} = \frac{10^5 \text{ g cm s}^{-2}}{10^4 \text{ cm}^2} = \\ &= \frac{10^5 \text{ dyn}}{10^4 \text{ cm}^2} = 10 \text{ Ba} \end{aligned}$$



Grandezze scalari e vettoriali

Grandezze **scalari**:

sono caratterizzate solo da un **intensità**.

(es: area di una figura piana, temperatura di un corpo, intervallo di tempo, energia ...)

Grandezze vettoriali o **vettori**:

sono caratterizzate da **intensità, direzione e verso**.

(es: posizione, velocità e accelerazione di un corpo, forza agente su un corpo ...)

Tutte avranno una **unità di misura**

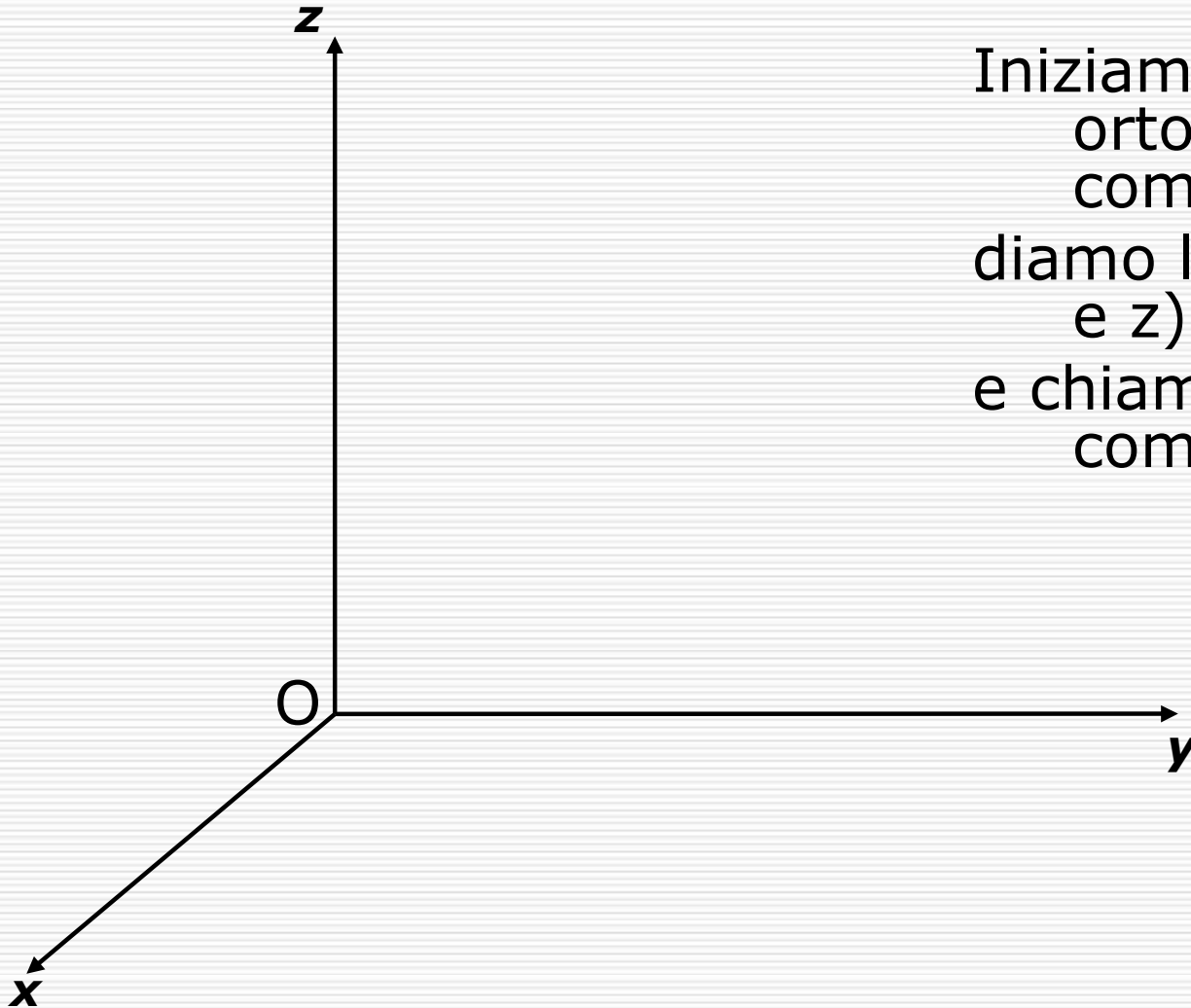
Algebra vettoriale

Le operazioni definite sulle grandezze vettoriali sono:

- ❑ SOMMA e DIFFERENZA di vettori
- ❑ PRODOTTO di un VETTORE per uno SCALARE
- ❑ PRODOTTO SCALARE
- ❑ PRODOTTO VETTORIALE
- ❑ PRODOTTO MISTO

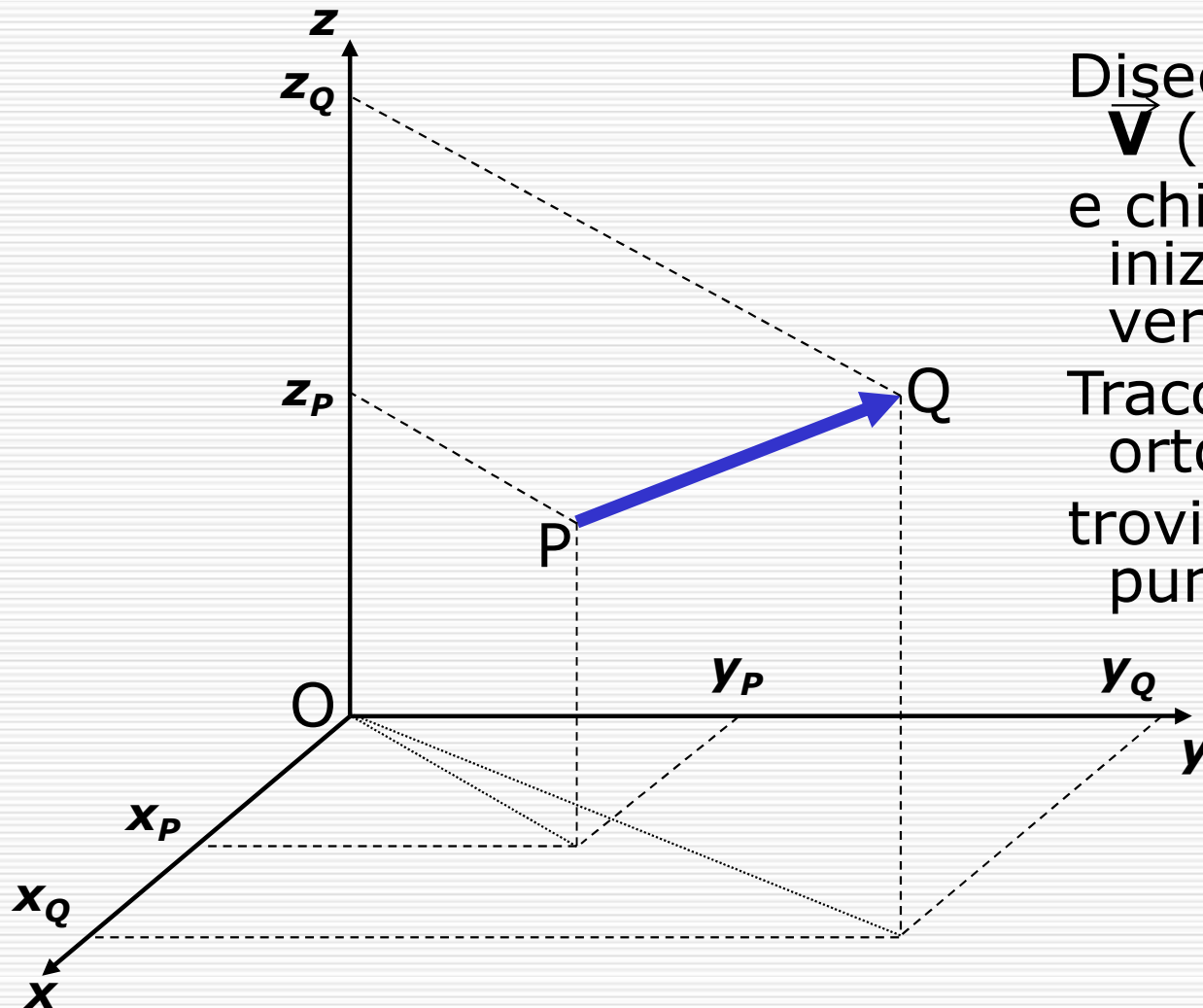
Ma intanto vediamo come si descrive un vettore:

I vettori in un Sistema di Riferimento Cartesiano



Iniziamo a disegnare tre assi ,
ortogonali e con un punto in
comune ...
diamo loro dei nomi (di solito x,y
e z) ...
e chiamiamo *origine* (O) il punto
comune dei tre assi

I vettori in un Sistema di Riferimento Cartesiano

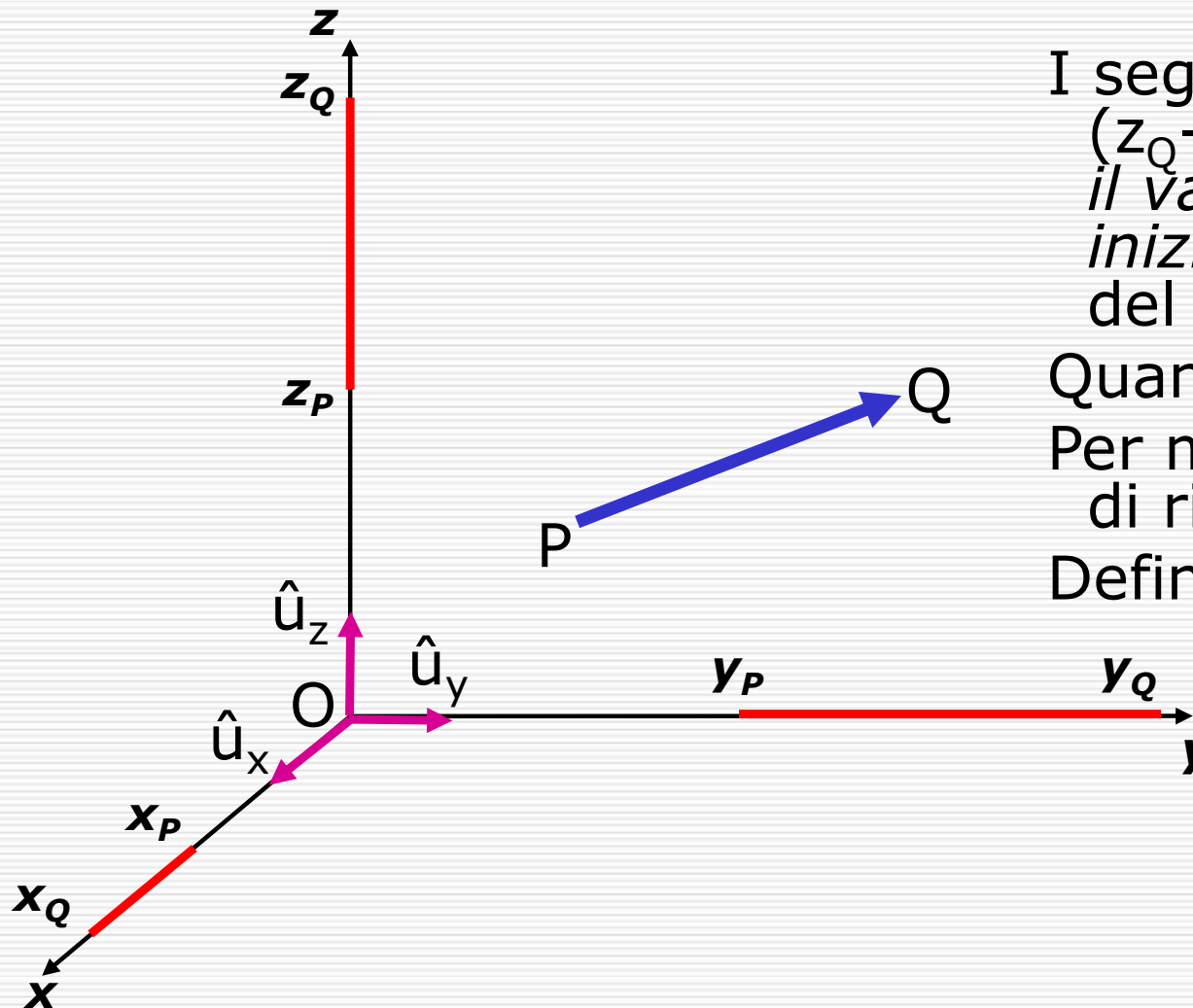


Disegniamo quindi un **vettore** $\vec{V}$ (la freccia significa "vettore") e chiamiamo **estremi** i punti iniziale e finale del vettore (il verso è dato dalla freccia)

Tracciando segmenti ortogonali agli assi ... troviamo le **coordinate** dei punti P ...

... e Q

I vettori in un Sistema di Riferimento Cartesiano



I segmenti $(x_Q - x_P)$, $(y_Q - y_P)$ e $(z_Q - z_P)$ (ricordatevi: **sempre** il valore finale meno il valore iniziale) sono le **componenti** del vettore.

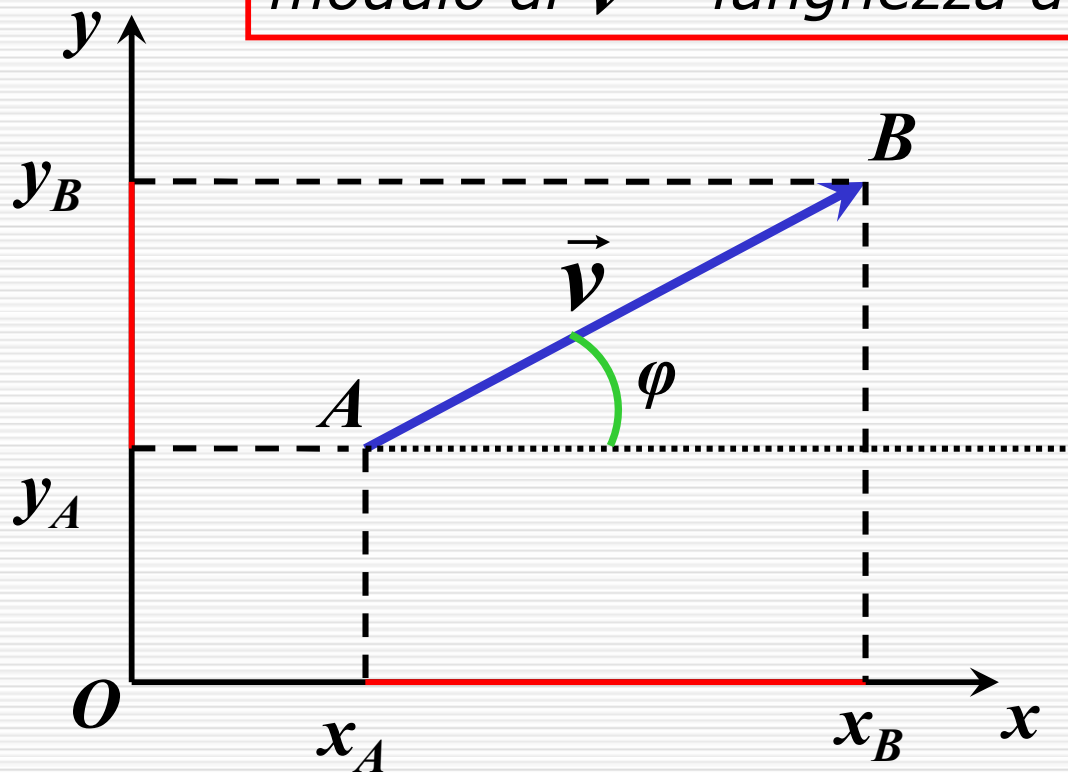
Quanto valgono?

Per misurarle abbiamo bisogno di riferimenti.

Definiamo i **versori** degli assi: $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ e $\hat{u}_z$, come i vettori di lunghezza = 1, orientati secondo gli assi

Vettori nel piano

modulo di $\vec{v}$ = lunghezza del segmento AB

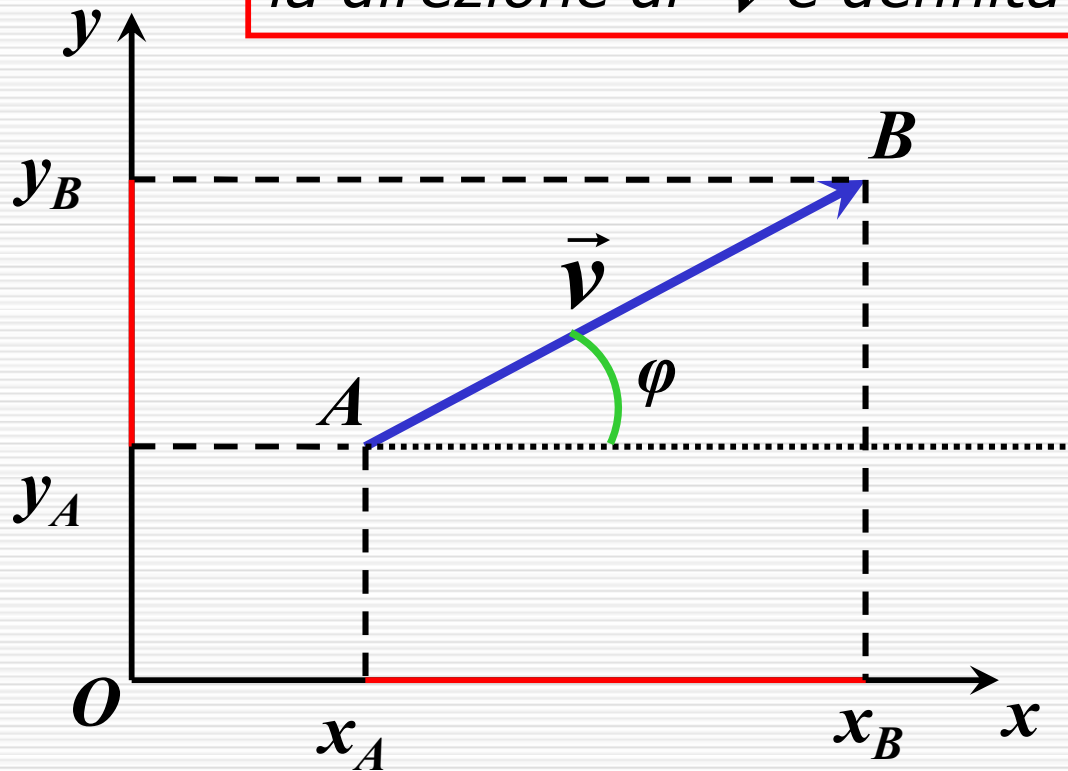


$$\vec{V} = (v_x, v_y)$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Vettori nel piano

la direzione di $\vec{v}$ è definita dall'angolo φ

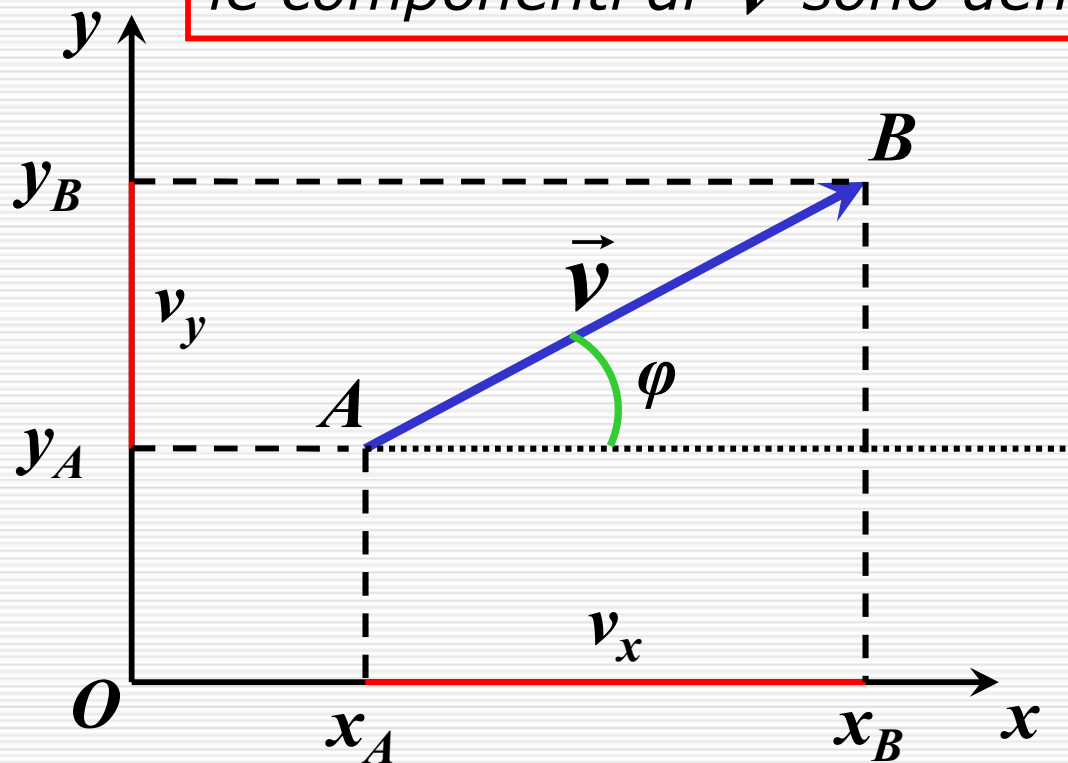


$$\vec{V} = (V_x, V_y)$$

$$\varphi = \arctan \frac{V_y}{V_x}$$

Componenti di vettori nel piano

le componenti di $\vec{v}$ sono definite per mezzo di φ



$$\begin{cases} v_x = v \cos \varphi \\ v_y = v \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = x_B - x_A \\ v_y = y_B - y_A \end{cases}$$

Prodotto di un vettore per uno scalare

Dati uno scalare c ed un vettore $\vec{v}$, si definisce il prodotto

$$\vec{u} = c \vec{v}$$

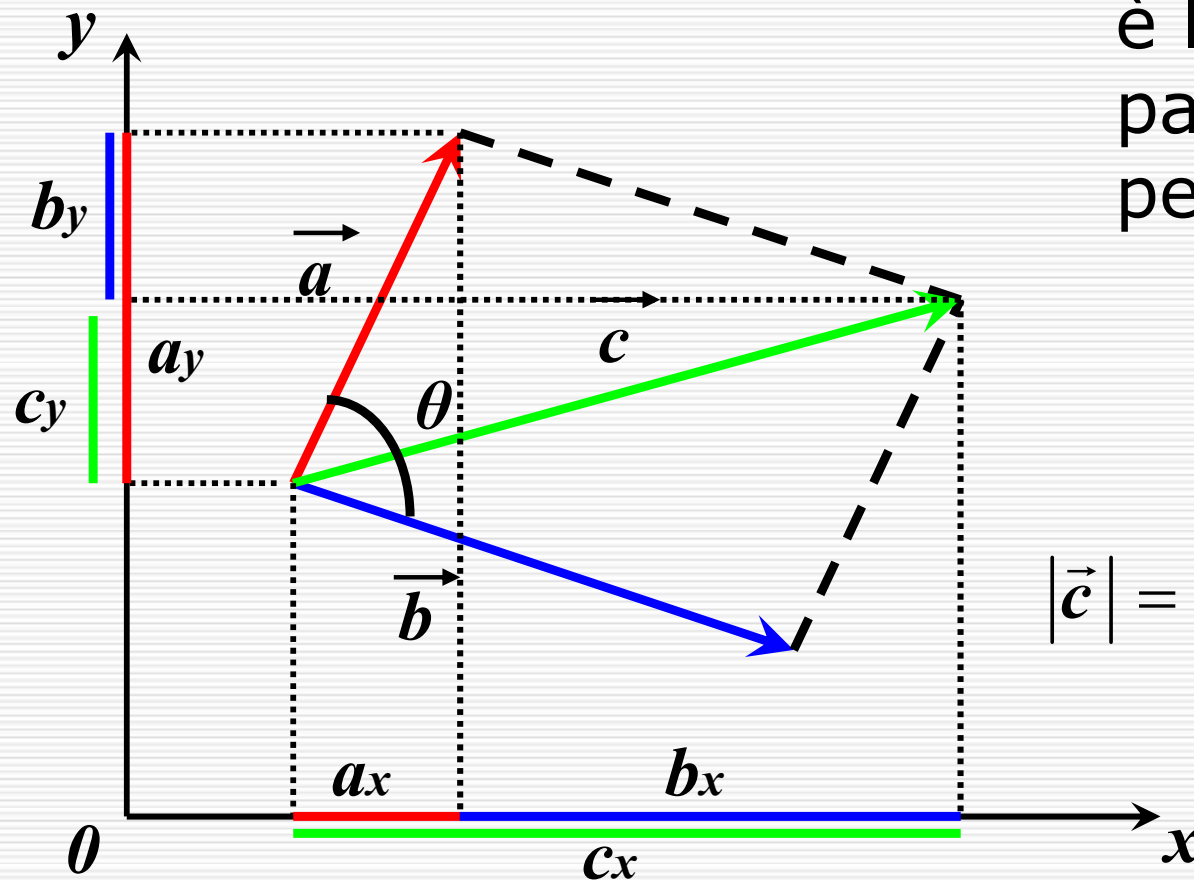
Il vettore $\vec{u}$ è parallelo a $\vec{v}$. Il modulo di $\vec{u}$ è dato da:

$$|\vec{u}| = |c| \cdot |\vec{v}|$$

Il verso di $\vec{u}$ è lo stesso di $\vec{v}$ se $c > 0$, è opposto a quello di $\vec{v}$ se $c < 0$

Somma di due vettori

Il vettore somma $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ è la diagonale del parallelogramma avente per lati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$



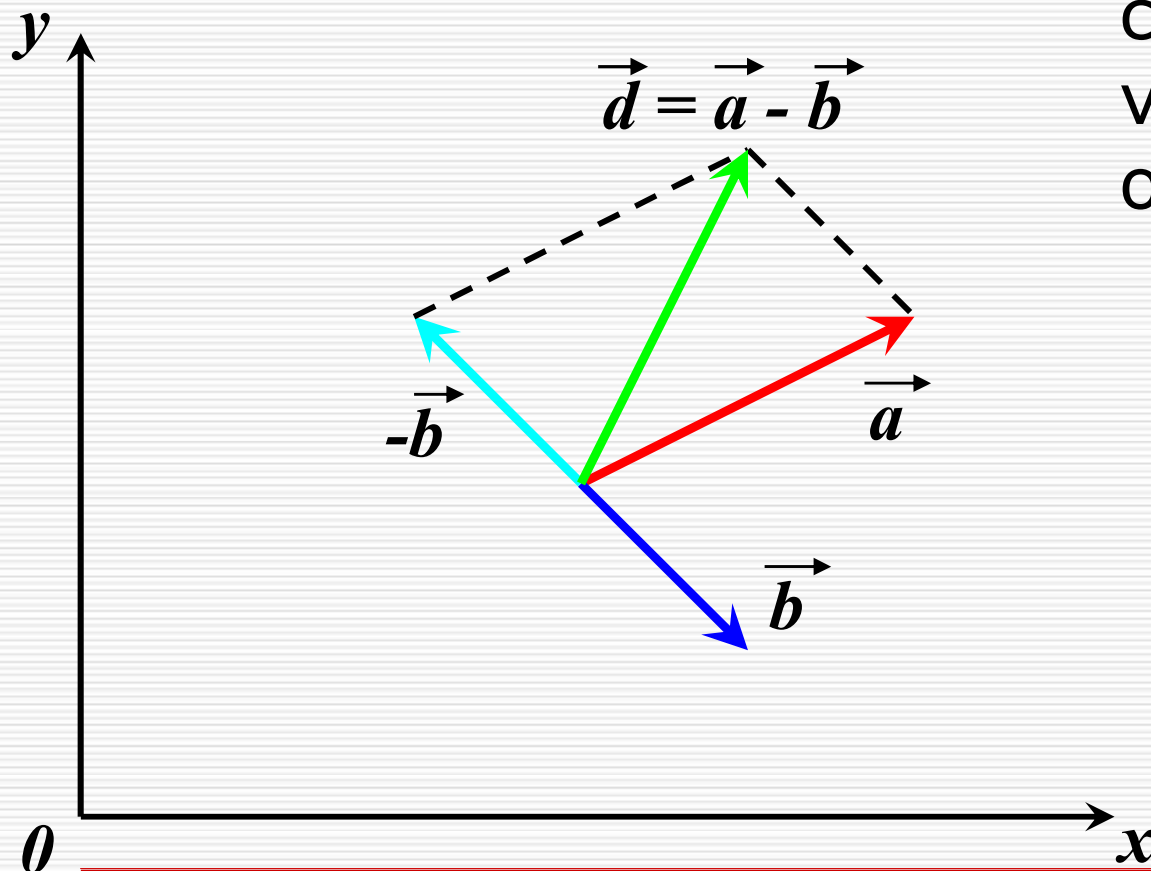
$$c_x = a_x + b_x$$

$$c_y = a_y + b_y$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

Differenza di due vettori (1)

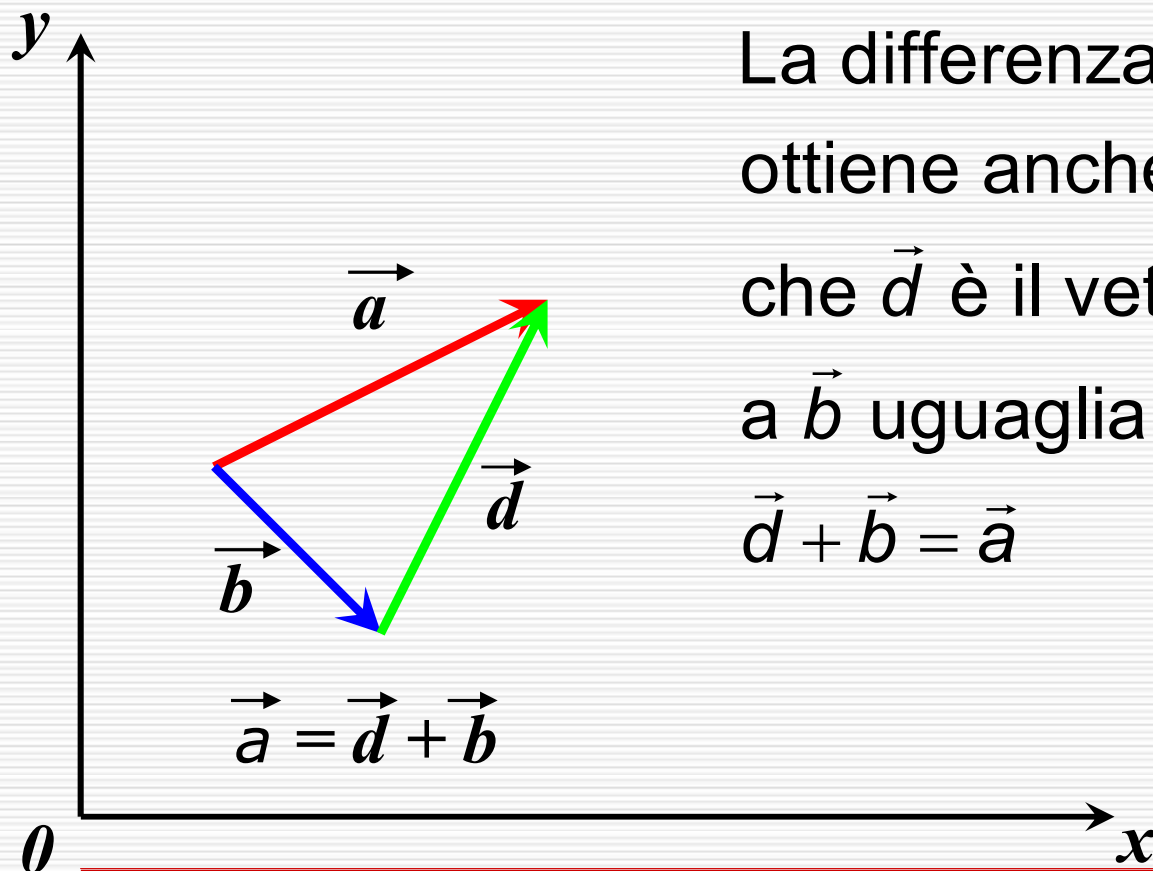
La differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ si calcola sommando al vettore $\vec{a}$ il vettore $-\vec{b}$, opposto del vettore $\vec{b}$



$$d_x = a_x - b_x$$

$$d_y = a_y - b_y$$

Differenza di due vettori (2)



La differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ si
ottiene anche considerando
che $\vec{d}$ è il vettore che sommato
a $\vec{b}$ uguaglia $\vec{a}$
 $\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$

2007-2008 (68)

Quale dei vettori indicati nei seguenti disegni con i numeri rispettivamente 1, 2, 3, 4, 5 rappresenta il vettore differenza $b - a$?

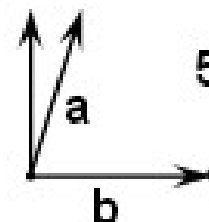
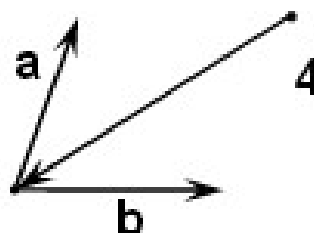
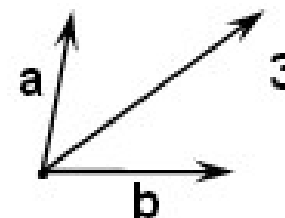
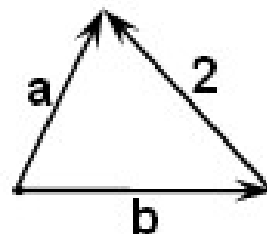
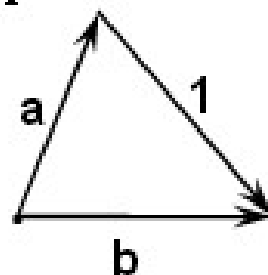
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5



$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} \Rightarrow \vec{a} + \vec{d} = \vec{b}$$

2005-2006 (63)

Quale dei vettori indicati nei seguenti disegni con i numeri rispettivamente 1, 2, 3, 4, 5 rappresenta il vettore differenza $\vec{a} - \vec{b}$?

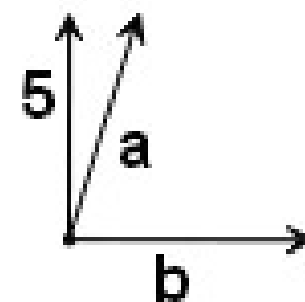
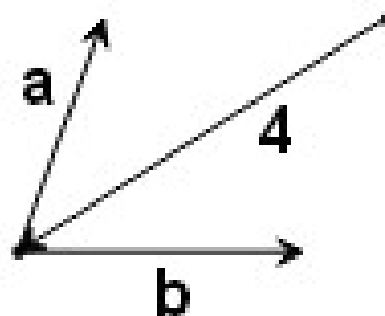
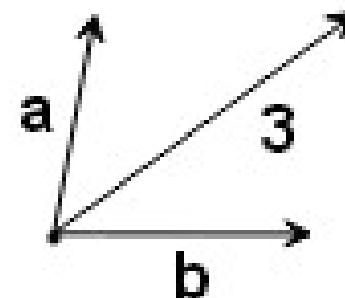
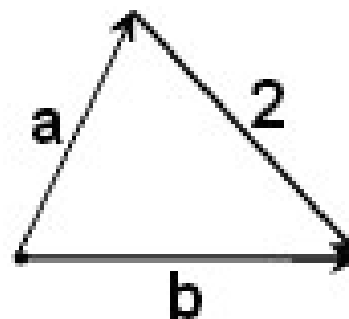
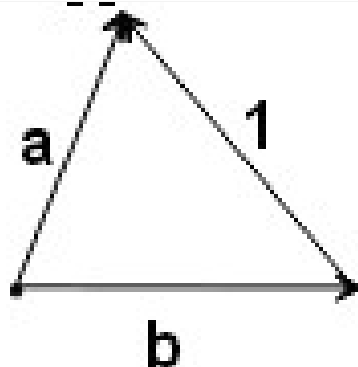
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

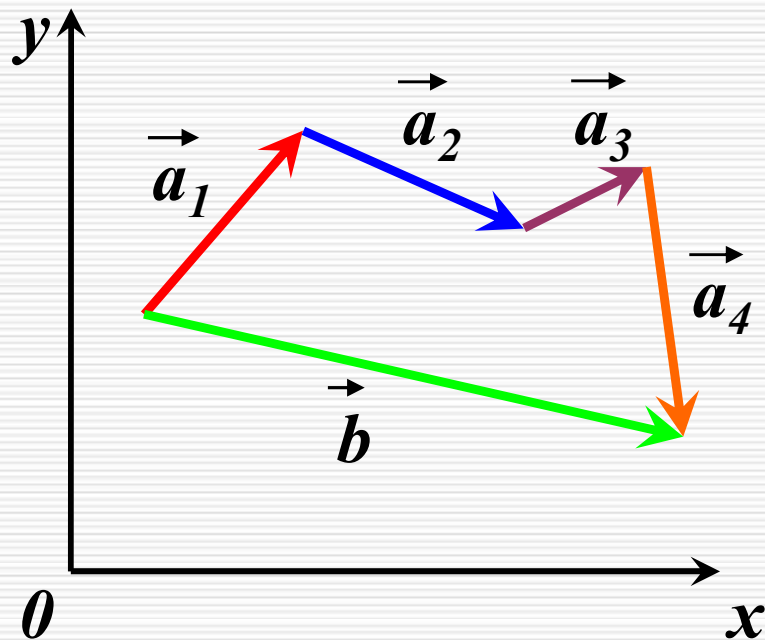


$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{b} + \vec{d} = \vec{a}$$

Somma di N vettori

Dati i vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$ il vettore somma $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_N$ si calcola nel modo seguente:

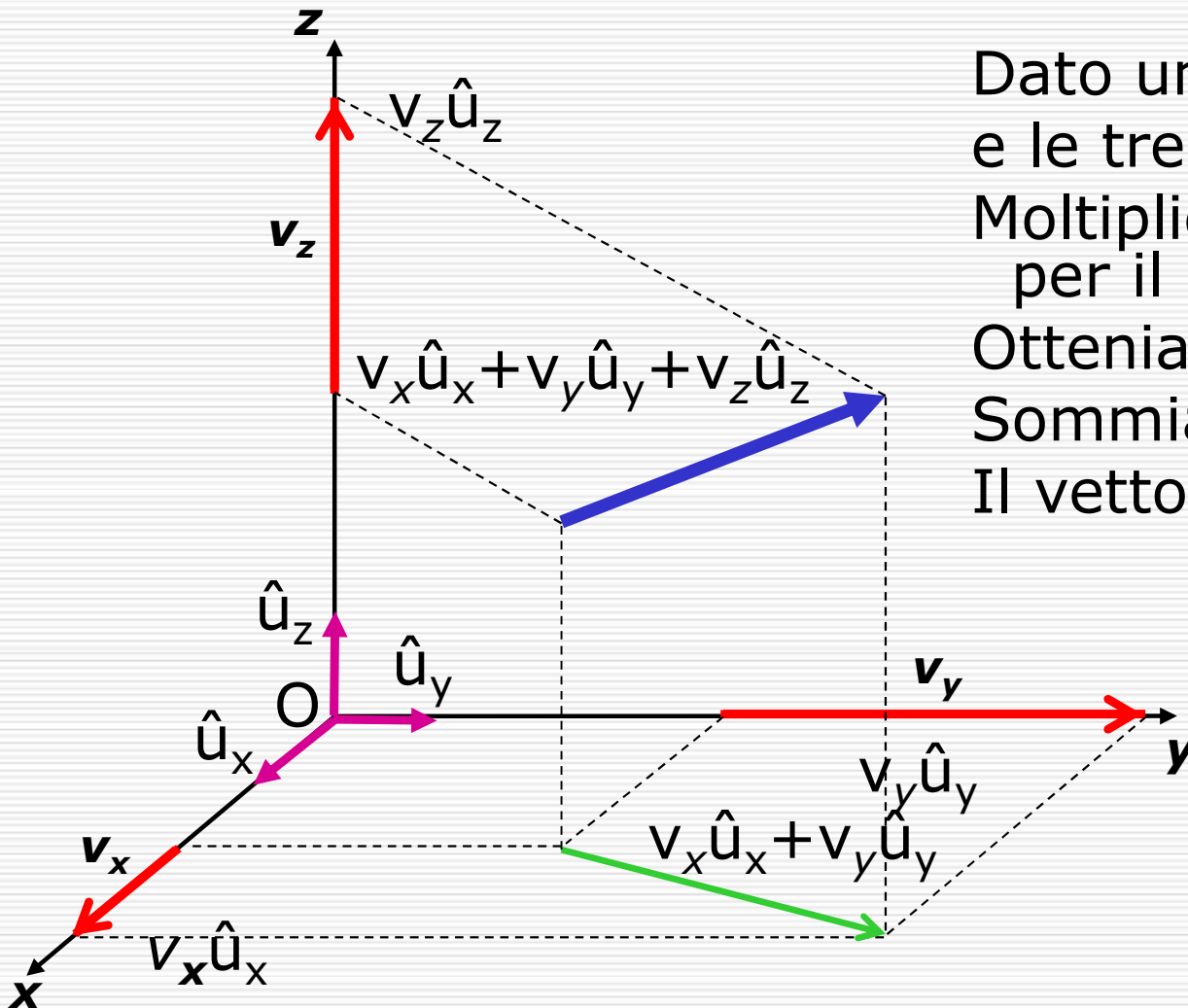
- si costruisce la spezzata formata dai vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$
- si congiungono i due estremi liberi di tale spezzata



$$b_x = a_{1x} + a_{2x} + \dots + a_{Nx}$$

$$b_y = a_{1y} + a_{2y} + \dots + a_{Ny}$$

Vettori espressi in termini delle loro componenti



Dato un riferimento cartesiano
e le tre componenti di un vettore
Moltiplichiamo ogni componente
per il rispettivo versore

Otteniamo tre vettori
Sommiamo i tre vettori
Il vettore $\mathbf{v}$ è quindi:

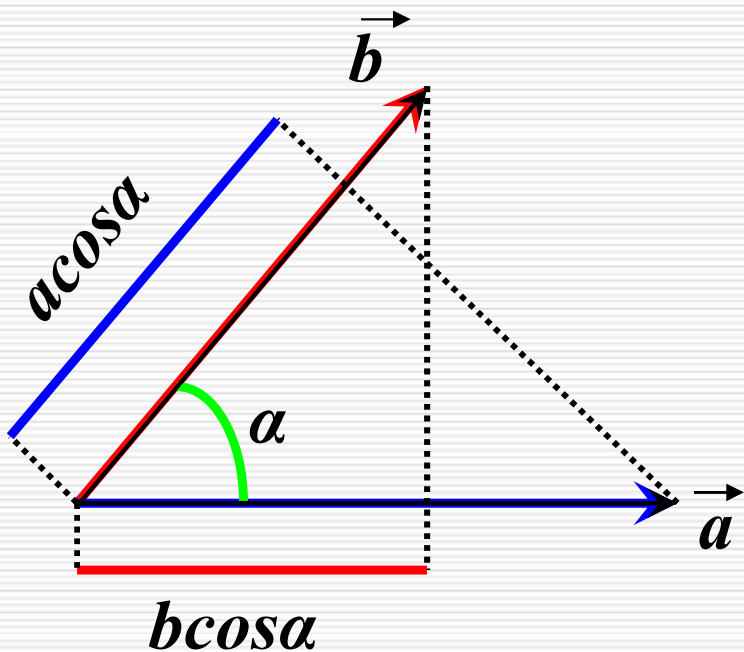
$$\mathbf{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y + v_z \hat{u}_z$$

Prodotto scalare

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il prodotto scalare tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è una grandezza scalare definita come: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \alpha$

Il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è pari al prodotto del modulo di $\vec{a}$ per la componente di $\vec{b}$ lungo la direzione di $\vec{a}$

Ovviamente il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è anche pari al prodotto del modulo di $\vec{b}$ per la componente di $\vec{a}$ lungo la direzione di $\vec{b}$



Prodotto vettoriale

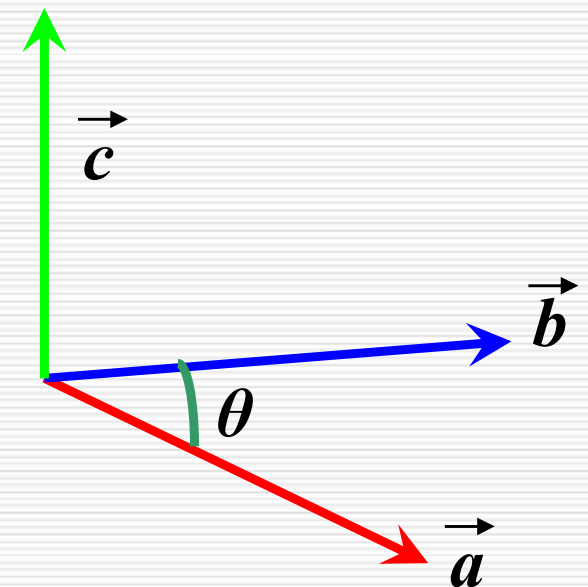
Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore che gode delle proprietà seguenti:

- il modulo di $\vec{c}$ è:

$$c = a b \sin\theta$$

dove θ è l'angolo minore di 180° compreso tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$

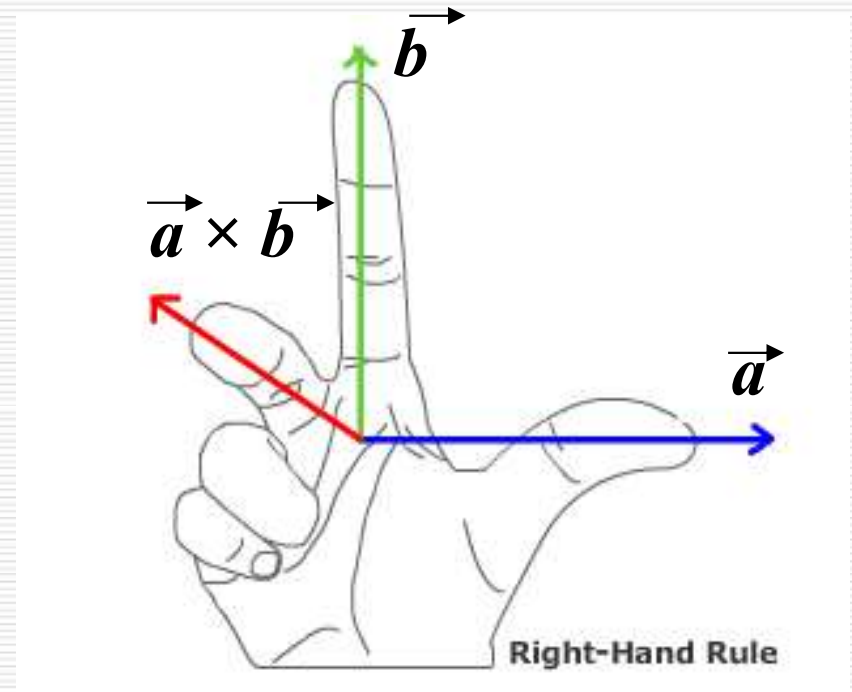
- la direzione di $\vec{c}$ è perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- il verso di $\vec{c}$ è calcolato applicando la regola della mano destra



La regola della mano destra

Prima formulazione

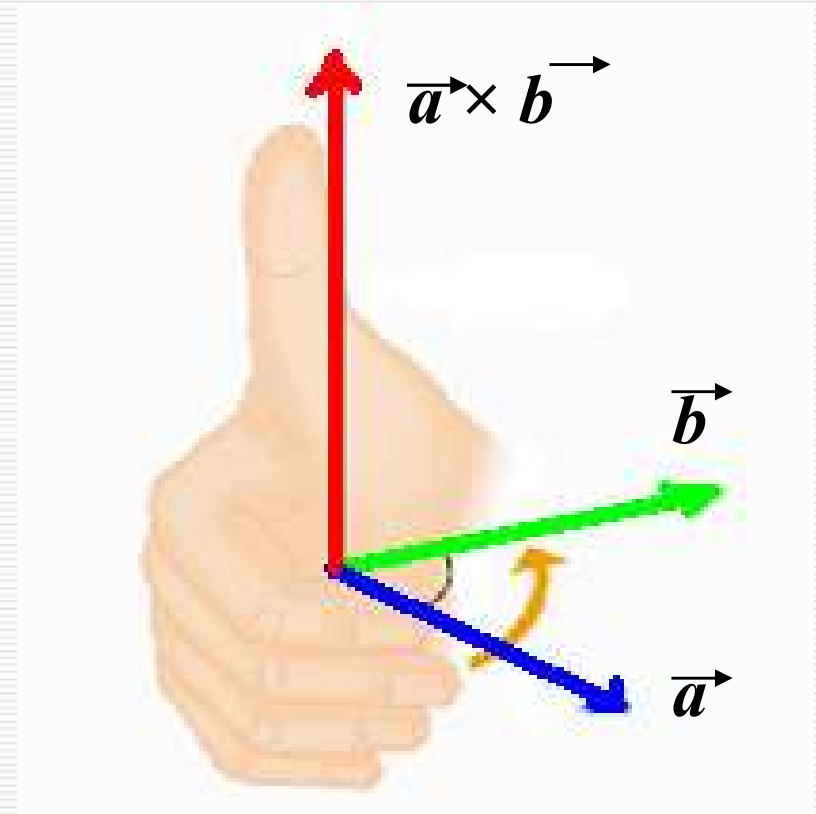
- Si dispone il pollice lungo il primo vettore
- Si dispone l'indice lungo il secondo vettore
- Il verso del medio individua il verso del prodotto vettoriale



La regola della mano destra

Seconda formulazione

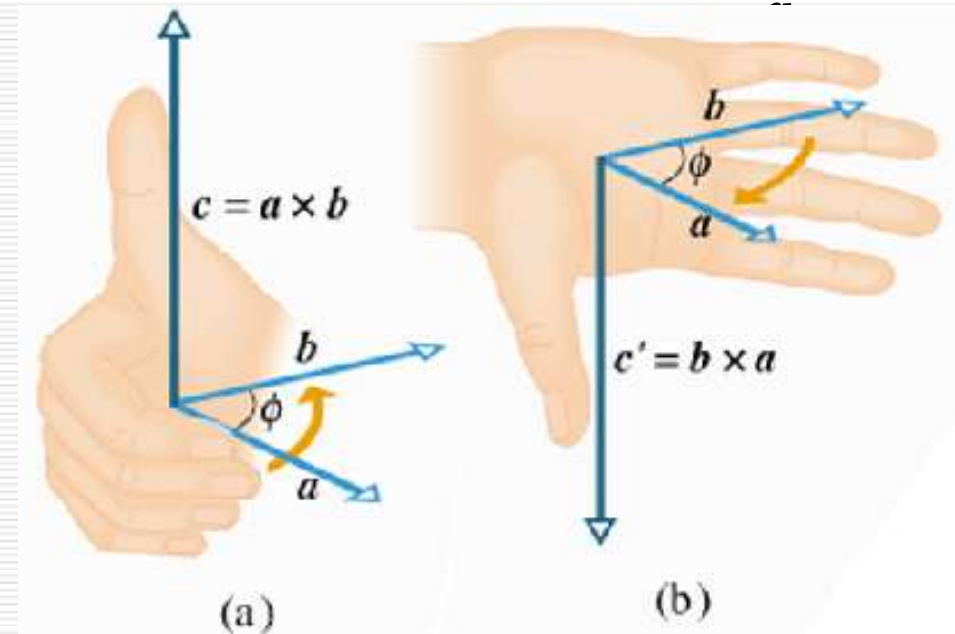
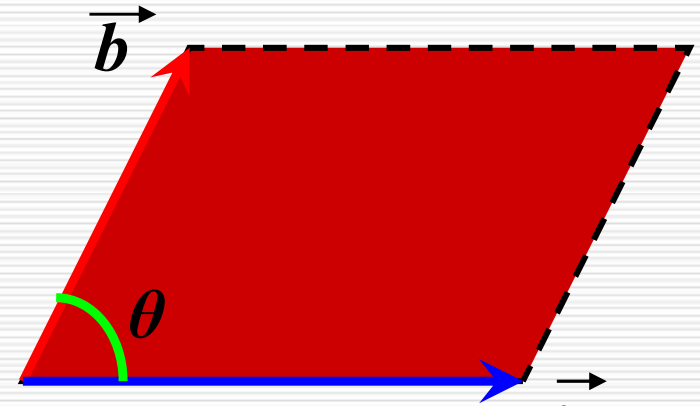
- Si chiude a pugno la mano destra mantenendo sollevato il pollice
- Le dita chiuse a pugno devono indicare il verso in cui il primo vettore deve ruotare per sovrapporsi al secondo in modo che l'angolo θ di rotazione sia minore di 180°
- Il verso del pollice individua il verso del prodotto vettoriale



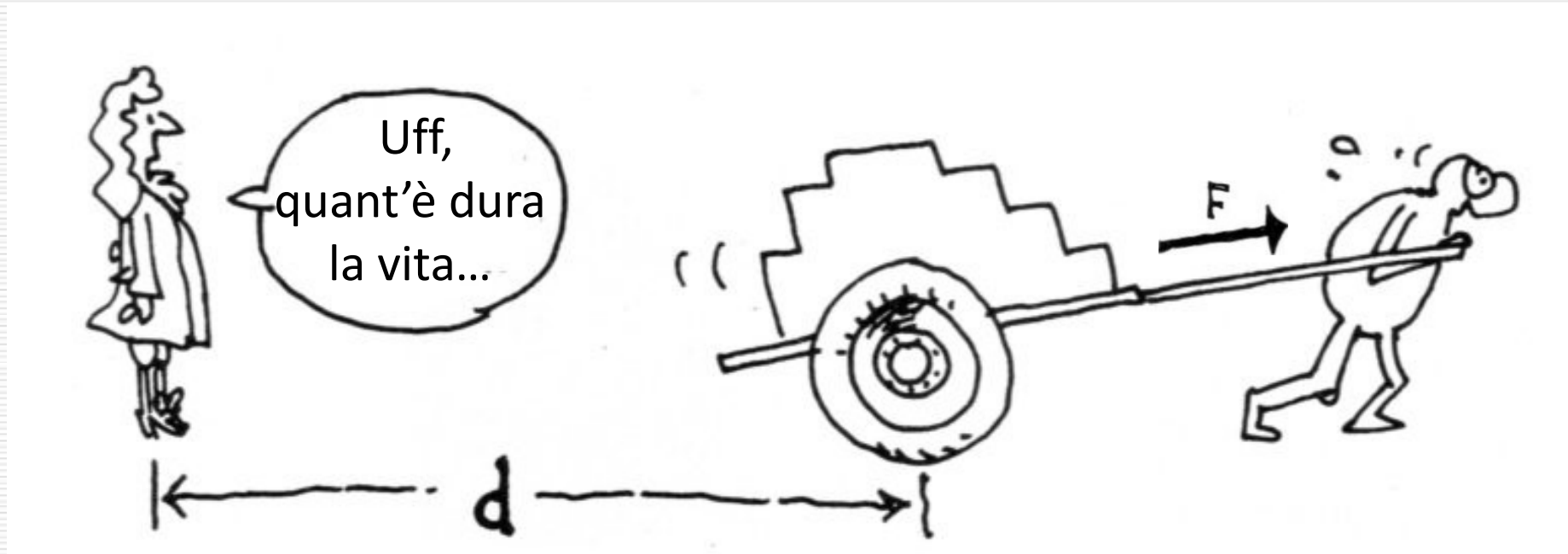
Proprietà del prodotto vettoriale

- Il modulo del prodotto vettoriale è pari all'area del parallelogramma individuato dai due vettori
- Il prodotto vettoriale è nullo se i due vettori sono paralleli ($\theta=0$)
- Il prodotto vettoriale gode della proprietà anticommutativa:

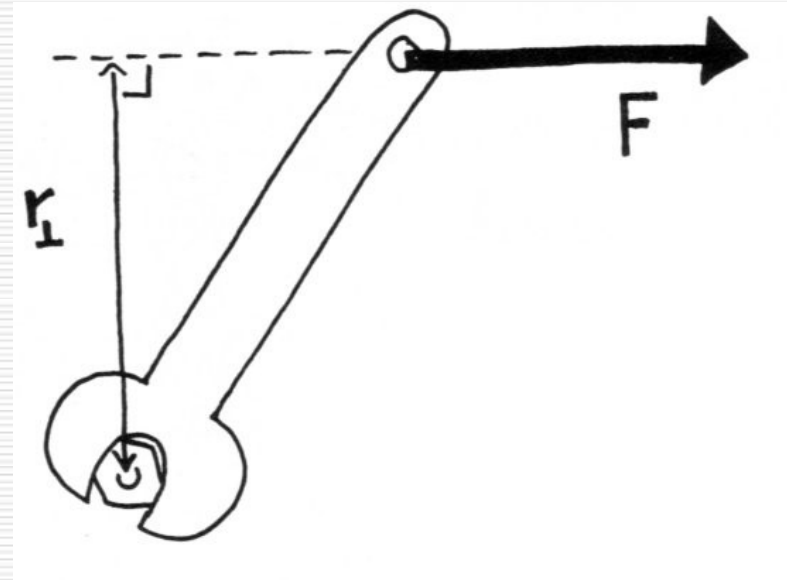
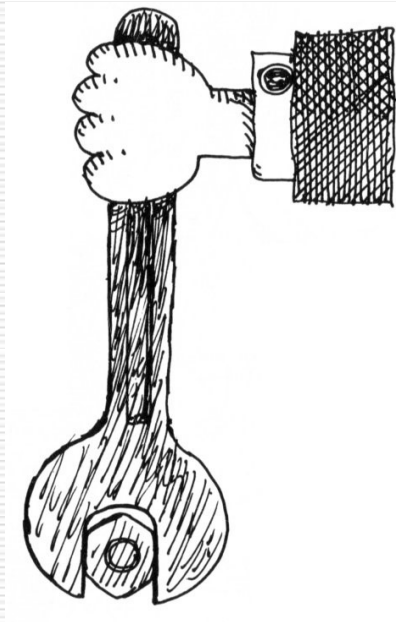
$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$



Applicazioni: prodotto scalare

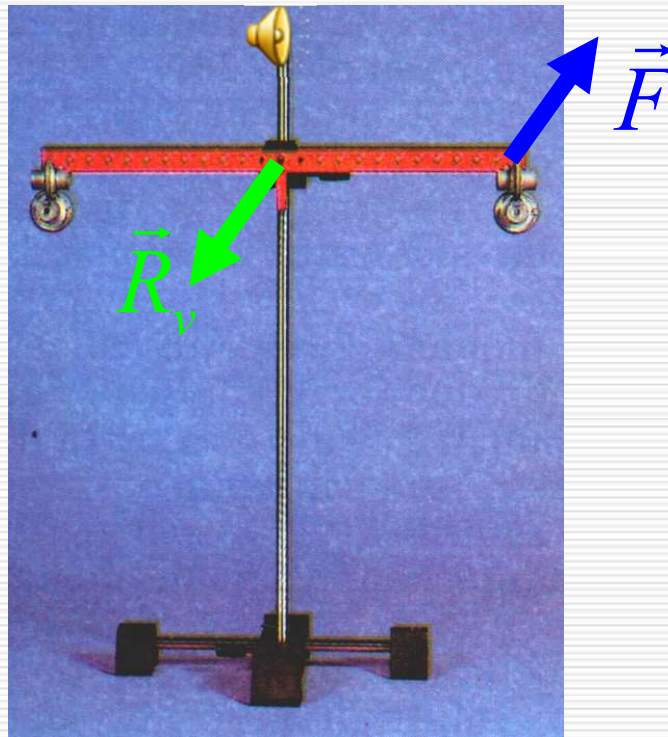


Applicazioni: prodotto vettoriale



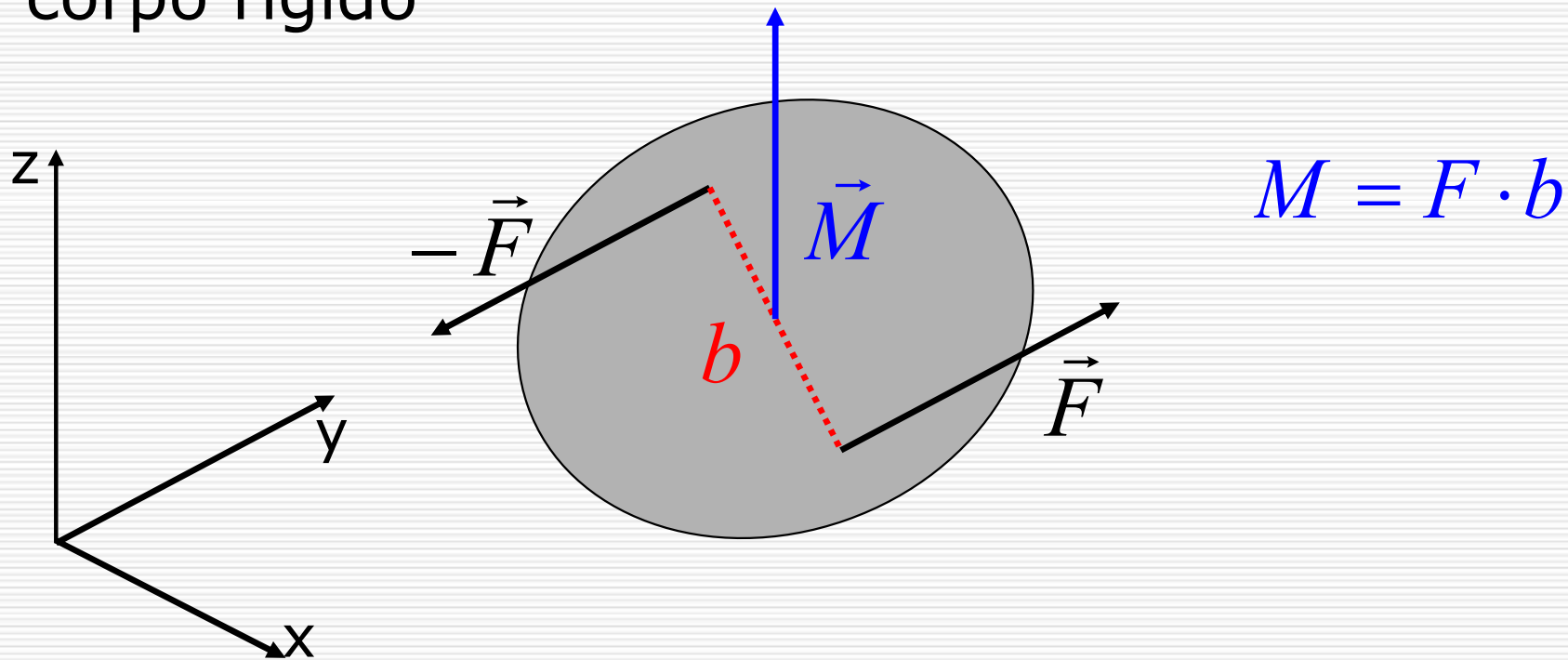
Coppie di forze

Le rotazioni non sono il risultato di un'unica forza esterna ma in realtà le forze applicate al corpo sono sempre due



Coppie di forze

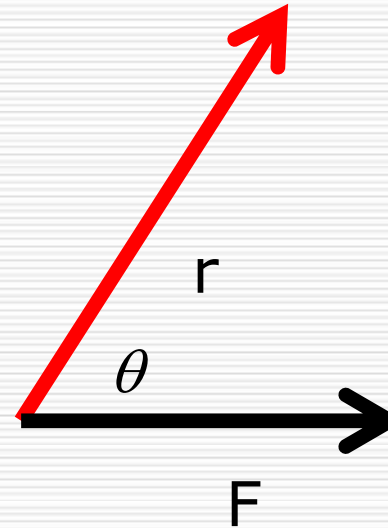
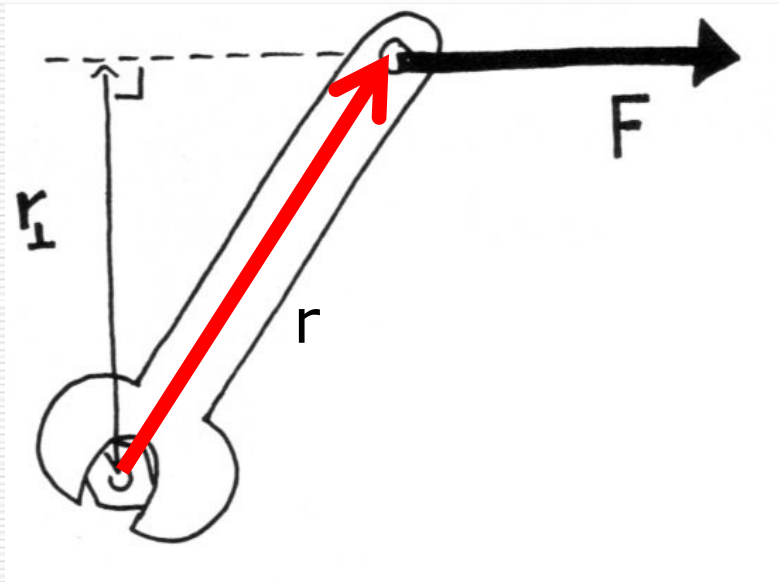
Definiamo allora *Coppia di Forze* due forze di uguale intensità, verso opposto e rette d'azione parallele, applicate in punti diversi di uno stesso corpo rigido



Momento di una coppia di forze

Il **momento di una coppia di forze** è il vettore perpendicolare al piano della coppia con il verso piedi-testa di un osservatore che vede la rotazione prodotta dalla coppia procedere in verso antiorario, avente per modulo il prodotto dell'intensità di una forza per il braccio della coppia, cioè la distanza tra le rette d'azione delle due forze

Momento di una forza



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}| = r F \sin \theta_{<\pi} = r_{\perp} F$$

Cosa ricordare:

Vettori e scalari

- Esistono **vettori e scalari**
- I vettori hanno **intensità** (modulo), **direzione** e **verso**
- Un vettore **$\mathbf{v}$** varia (non è costante) quando varia anche una sola delle sue proprietà (se il modulo $|\mathbf{v}|$ è costante ma cambia la direzione il vettore **$\mathbf{v}$** **non** è costante)
- Le proiezioni del vettore sugli assi si chiamano **componenti** (es. v_x, v_y, v_z)
- Il modulo del vettore è dato dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti

$$|\mathbf{v}| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$$

Cosa ricordare:

Operazioni sui vettori

- **Somma** di vettori (**risultante**):
 - regola del parallelogramma
 - disegnati i vettori consecutivamente, unire l'origine del primo con il vertice dell'ultimo
- **Differenza** di vettori:
 - sommare il vettore minuendo con l'opposto del sottraendo: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$
 - unite le origini dei due vettori, tracciare il vettore che parte dal vertice del sottraendo e termina sul vertice del minuendo

Cosa ricordare:

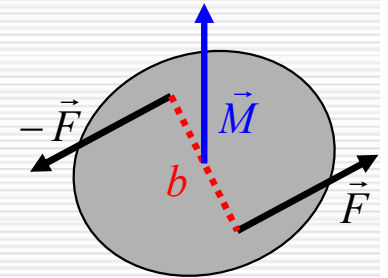
Prodotti sui vettori

- Prodotto **scalare**
 - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$
 - il prodotto scalare di due vettori perpendicolari è nullo
 - Prodotto **vettoriale**:
 - $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$
 - direzione perpendicolare a entrambi i vettori
 - verso dato dalla regola della mano destra
 - se due vettori sono paralleli (o antiparalleli) il prodotto vettoriale è nullo
 - Prodotto **misto**:
 - è uno prodotto vettoriale seguito da un prodotto scalare
 - $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
-

Cosa ricordare:

Coppia di vettori

- E' costituita da due forze **uguali** in modulo e **opposte**: $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$
- Provoca una rotazione
- Ha risultante **nulla**
- Il **braccio** è la distanza tra le rette su cui giacciono le forze
- Ha un **momento** uguale alla forza per il braccio
 $|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}| b$



Momento di una forza

- Riguarda vettori applicati in un punto
- Ha modulo $|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = r F \sin \theta = r_{\perp} F$

